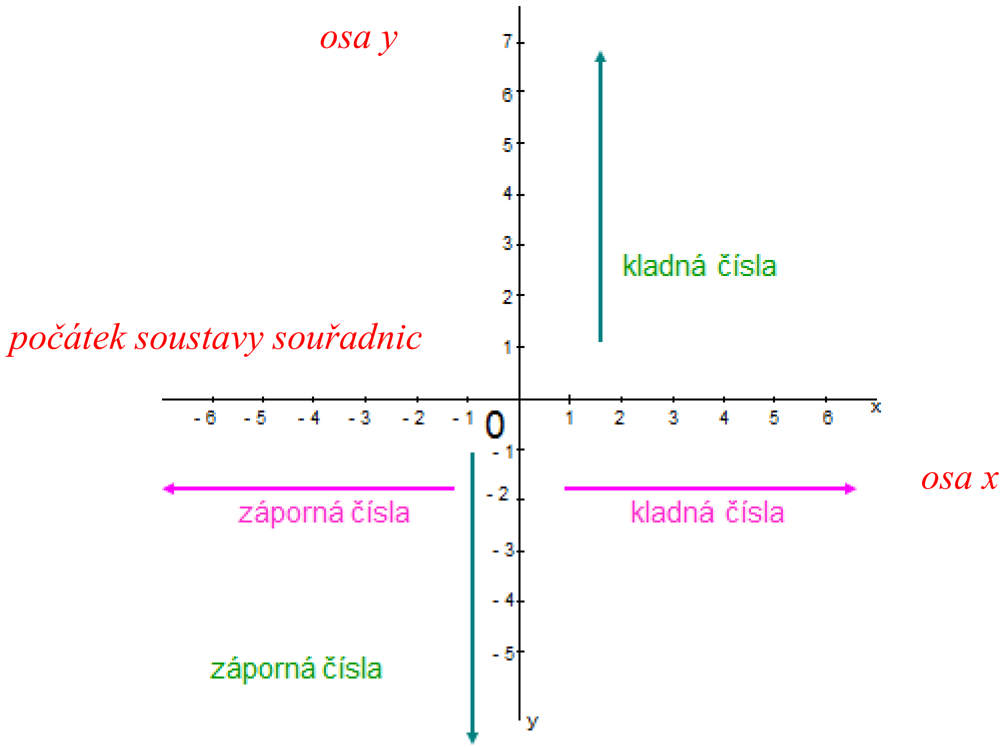
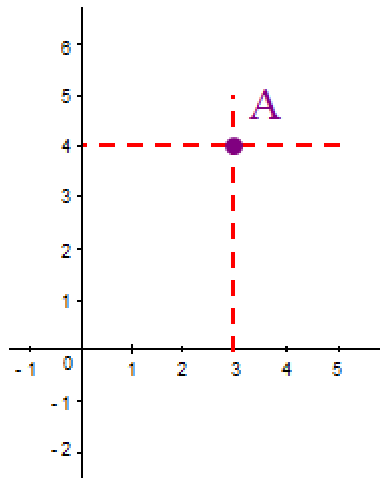
6. Uspořádaná dvojice čísel, pravoúhlá soustava souřadnic v rovině. Lineární funkce vyjádřená tabulkou, rovnicí, grafem, rostoucí, klesající, konstantní, průsečíky grafu s osami x, y

Pravoúhlá soustava souřadnic v rovině O_{xy}

Sestroj přímku x, na ni kolmou přímku y. Průsečík označ písmenem O. Vyznač na přímce x a y jako na číselné ose obrazy celých čísel (viz obr.).





$A[x; y]$

Př.1: Sestroj bod A, jehož první souřadnice je 3 a druhá souřadnice jsou 4. Zápis souřadnic bodu A: $A[3;4]$

uspořádaná dvojice čísel

- na ose x najdi bod 3 a sestroj v něm kolmici k ose x

- na ose y najdi bod 4 a sestroj v něm kolmici k ose y

- průsečík kolmic je bod A

Př.2: Sestroj body *D, E ležící na ose y*

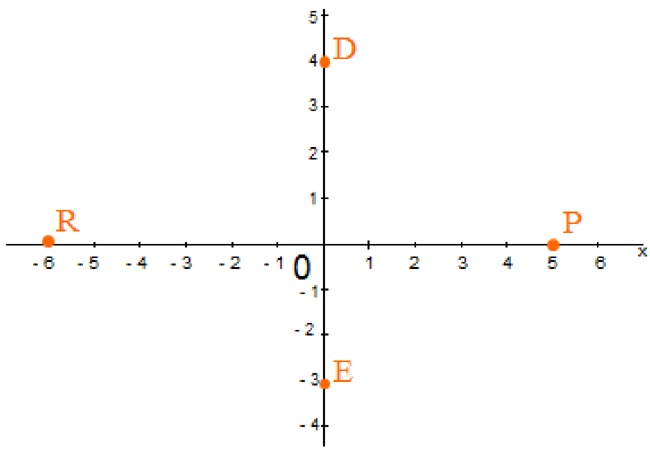
(jejich první souřadnice je rovna 0)

D[0; 4]   E[0; -3]

Sestroj body P, R ležící na ose x

(jejich druhá souřadnice je rovna 0)

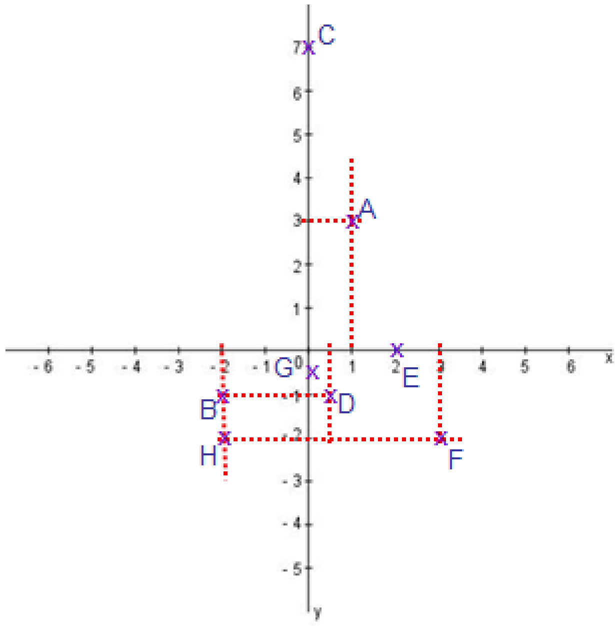
P[5; 0]   R[-6; 0]



Př.:

Do pravoúhlé soustavy souřadnic zakresli body:

A[1; 3]
B[-2; -1]
C[0; 7]
D[0,5; -1]
E[2; 0]
F[3; -2]
G[0; -0,5]
H[-2; -2]



Př.:

Urči souřadnice bodů

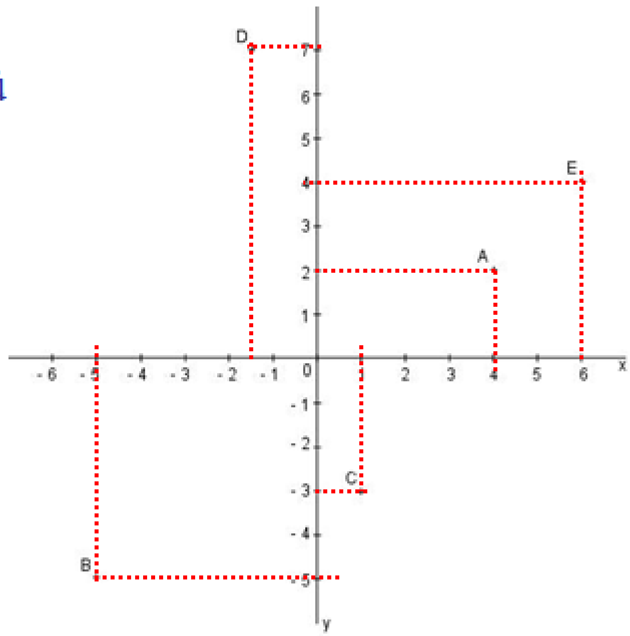
A[4; 2]

B[-5;-5]

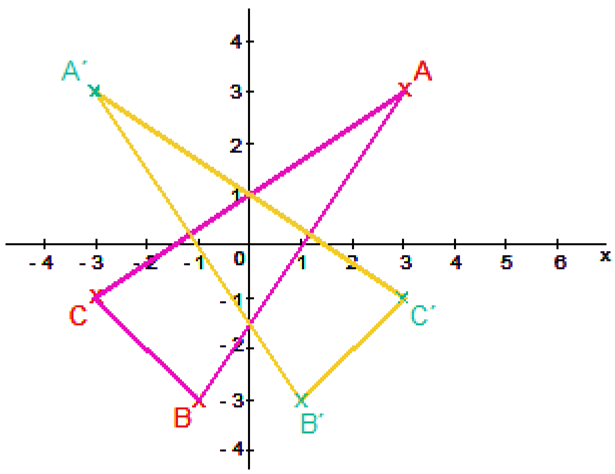
C[1;-3]

D[-1,5;7]

E[6;4]



Př.: Sestroj trojúhelník ABC: A[3,3], B[-1, -3], C[-3, -1] a urči souřadnice vrcholů obrazu v osové souměrnosti podle osy y.



Řešení: A´[-3,3], B´[1, -3], C´[3, -1]

♣♣♣ PS A 20/1 - 5

FUNKCE

- vyjadřuje závislost dvou veličin
- veličiny mohou být z oblasti fyziky, biologie, statistiky, různých oborů techniky, …
- závislost lze vyjádřit graficky (graf), rovnicí nebo tabulkou

Př. závislost dráhy na čase, hmotnost tělesa na jeho objemu (fyzika), závislost obsahu čtverce na délce jeho strany, ….

Tabulka závislosti dráhy ***s*** ujeté autem za dobu jízdy ***t*** při průměrné rychlosti auta ***v*** = 75 km/h. Pro čas ***t*** platí ***t*** $\in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6 h}. Rovnice: ***s = v . t*** ***tj. s = 75 . t***

t (h)	1	2	3	4	5	6
s (km)	75	150	225	300	375	450

Funkcí *f* nazýváme přiřazení, které každému prvku dané množiny *D* přiřazuje právě jedno reálné číslo.

Množinu ***D*** nazýváme **definiční obor** funkce *f*.

Funkce *f* je dána: vzorcem (rovnicí)
tabulkou
grafem

Funkci f zapisujeme:

f: x $\longrightarrow$ ***y, x*** $\in$ ***D*** (čteme: prvku *x* množiny D je přiřazeno funkcí *f* reálné číslo *y)*

nebo: ***y = f(x), x*** $\in$ ***D*** (čteme: prvku *x* množiny D je přiřazeno funkcí *f* reálné číslo *y)*

proměnná ***x*** = ***nezávisle*** *proměnná (**Nezávislost je dána tím, že její hodnotu můžeme libovolně měnit, ovšem jen v rámci definované množiny, definičního oboru.)***

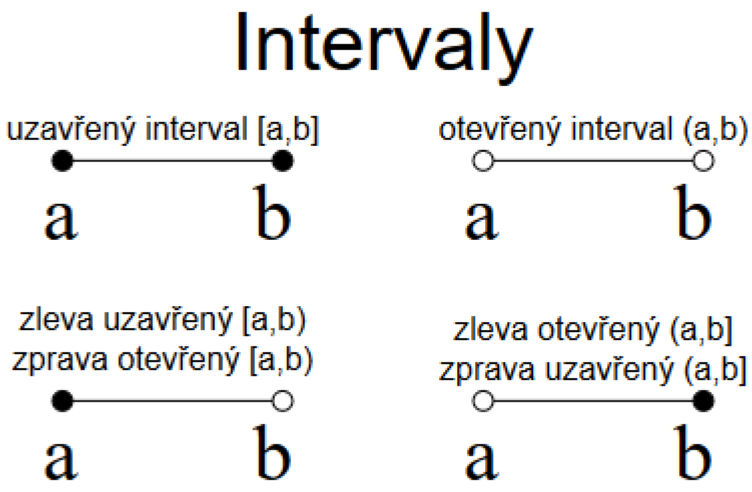
proměnná ***y*** = ***závisle*** *proměnná*

množina ***D*** = ***definiční obor*** *(*množina všech reálných čísel - x, je dána s funkcí*)*

množina ***H*** = ***množina hodnot funkce*** *(*množina všech reálných čísel - y, která jsou danou funkcí *f* přiřazena prvkům jejího *D - x)*

Grafem funkce *f: y = f(x), x* $\in$ *D* nazýváme množinu všech bodů roviny, které mají souřadnice [x, y]

Intervaly reálných čísel a, b, kde a < b



uzavřený interval $a \leq x \leq b$

otevřený interval $a < x < b$

zleva uzavřený, zprava otevřený

$a \leq x < b$

zleva otevřený, zprava uzavřený

$a < x \leq b$

Př.: Vyber z uvedených tabulek ty, které mohou být zadáním funkce.

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

je funkce

x	1	1	2	2	3
y	1	2	3	4	5

není funkce (číslu jedna jsou přiřazeny dvě hodnoty 1 a 2, číslu dvě také)

x	1	2	3	4	5
y	1	1	2	2	3

je funkce

♣♣♣ PS A 21/1 - 3

LINEÁRNÍ FUNKCE (v širším slova smyslu)

Lineární funkce je taková funkce, která má v zápise argument x jen v „první mocnině", tzn. jen jako základ mocniny s exponentem rovnajícím se číslu 1.

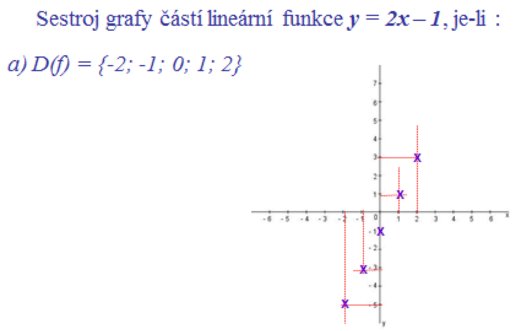
Je funkce daná vzorcem $y = kx + q$, kde $x \in R$; k, q jsou libovolná čísla

Grafem lineární funkce je **přímka.** (Slovo přímka pochází z latinského „linea", což označuje čáru nebo přímku.)

A)PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

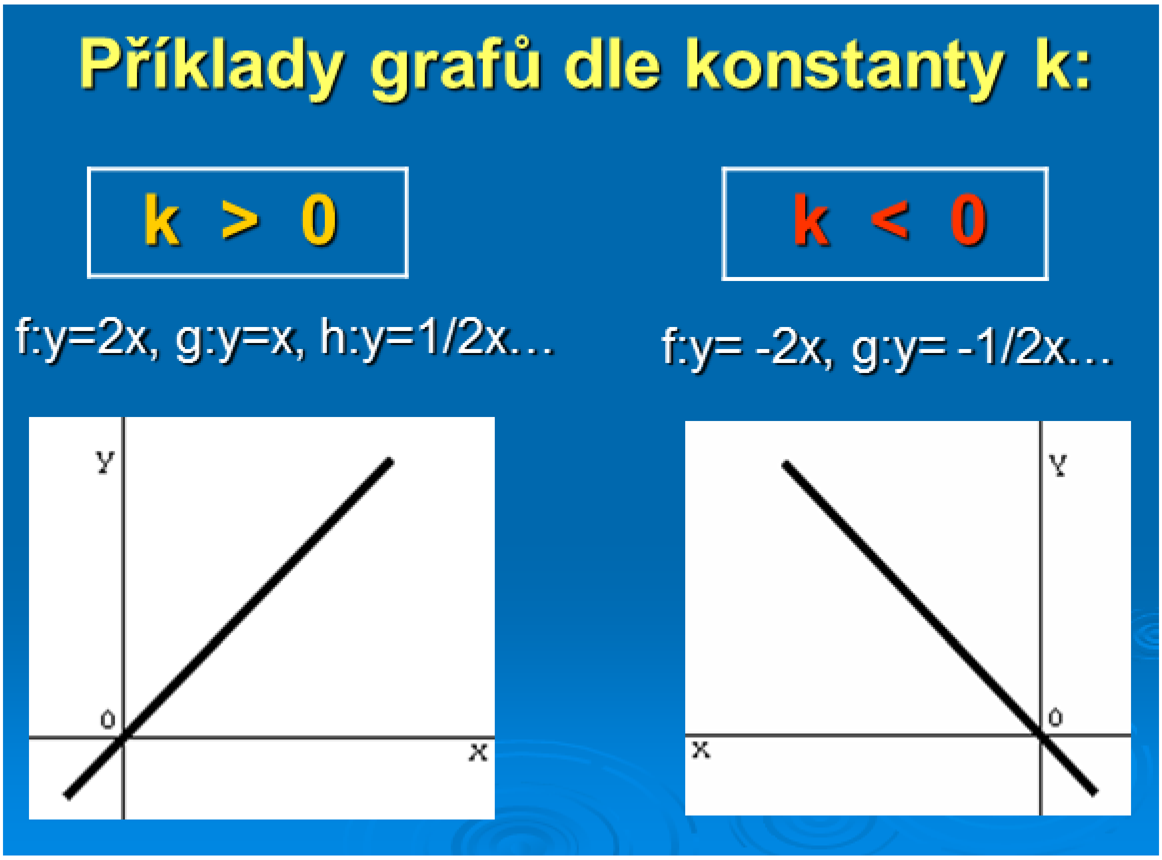
B)LINEÁRNÍ FUNKCE

C)KONSTANTNÍ FUNKCE



A)PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

- Je funkce vyjádřená vzorcem **y = kx**, kde **k** je libovolné číslo ***různé od nuly***
- Grafem přímé úměrnosti, jejíž definiční obor tvoří všechna čísla, je **přímka procházející počátkem soustavy souřadnic.**



ROSTOUCÍ FCE

KLESAJÍCÍ FCE

Pokud není uvedený definiční obor přímé úměrnosti, tvoří ho **<u>všechna reálná čísla.</u>**

Grafem přímé úměrnosti je obecně přímka procházející počátkem soustavy souřadnic (pokud je definičním oborem množina reálných čísel).
Avšak vzhledem k definičnímu oboru pracujeme většinou pouze s podmnožinami přímky, tj. buď s polopřímkou nebo s úsečkou.
<u>Pokud je však definičním oborem množina přirozených čísel, pak grafem závislosti je množina izolovaných bodů ležících na přímce (event. na polopřímce).</u>

PÚ:

Kolikrát se zvětší (zmenší) jedna veličina, tolikrát se zvětší (zmenší) druhá veličina.

V jakém poměru se zvětší (zmenší) jedna veličina, v takovém poměru se zvětší (zmenší) druhá veličina.

Příklad:

Urči rovnici přímé úměry, doplň tabulku a sestroj graf dané úměry (v R).

x	2			8	10	12		16
y		12	18			36	42	

Řešení: k = y : x, protože y = k.x

Urči rovnici přímé úměry, doplň tabulku a sestroj graf dané úměry (v R).

x	2			8	10	12		16
y		12	18			36	42	

Konstanta k:

36 : 12 = 3

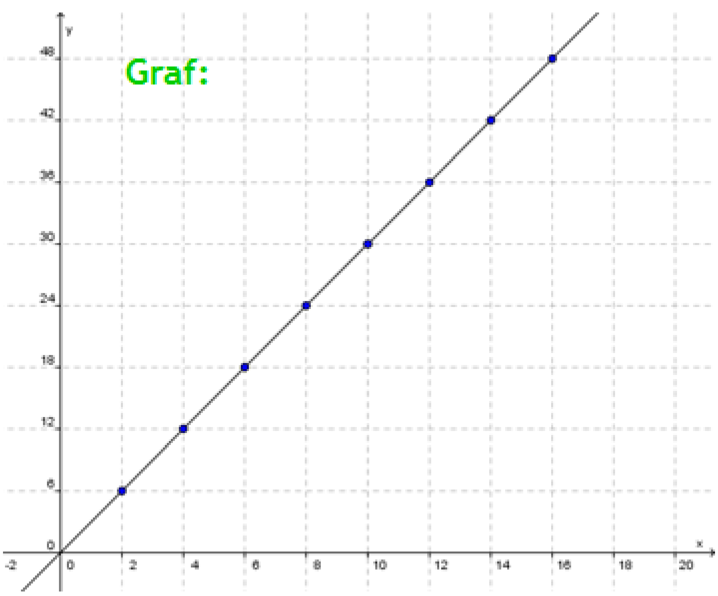
k = 3

Rovnice přímé úměry:

y = k . x

y = 3x

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	6	12	18	24	30	36	42	48



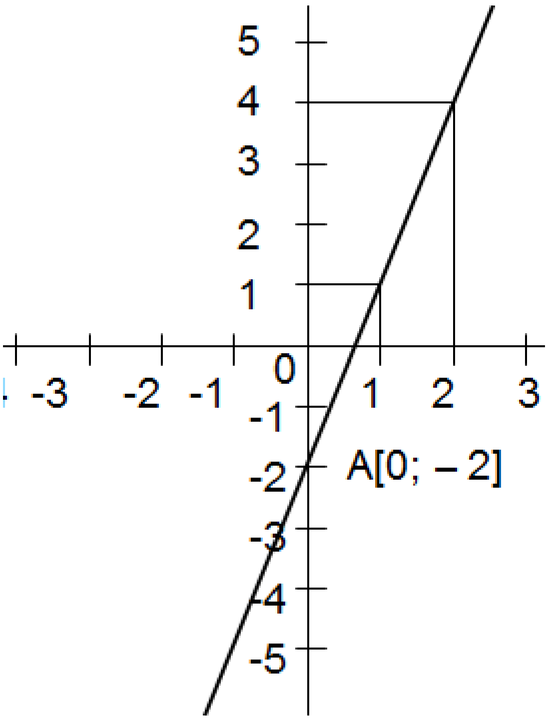
♣♣♣ PS A 23/1 - 4

B)LINEÁRNÍ FUNKCE

Každá funkce ***y = kx + q***, kde k, *q* jsou libovolná reálná čísla a definičním oborem je množina všech reálných čísel, se nazývá **lineární funkce**.

Grafem lineární funkce je **přímka**. (q – koeficient „posunutí" po ose y)

Př.: Sestroj graf lineární funkce *y = 3x – 2.*



x	-1	0	1	2
y = 3x – 2	-5	-2	1	4

Rozhodněte, která z daných funkcí je lineární. $D_f = R$.

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x^2 - 5$ c) $y = 0{,}5 - 2x$

d) $y = \frac{3}{x} - 7$ e) $y = \frac{-4x + 2}{5}$ f) $y = \frac{x - 1}{3}$

Řešení: a), c), e), f)

♣♣♣ PS A 25/1 a 2

ROSTOUCÍ A KLESAJÍCÍ FUNKCE

<u>Funkce je rostoucí</u>, právě když pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 z jejího definičního oboru platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $y_1 < y_2$.

Tedy: Rostoucí funkce je funkce, pro kterou platí: Zvětšují-li se hodnoty proměnné x, zvětšují se hodnoty funkce y.

Např. y = 3x – 2

x	**1**	**2**
y = 3x – 2	**1**	**4**

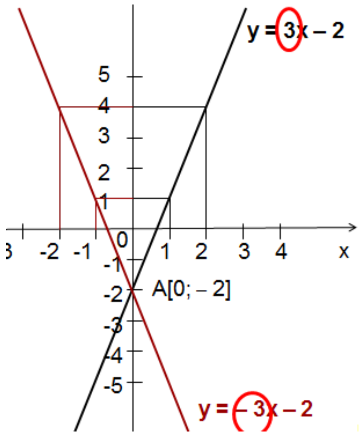
Lineární funkce *y = kx + q* je rostoucí, jestliže k > *0*.

<u>Funkce je klesající</u>, právě když pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 z jejího definičního oboru platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $y_1 > y_2$.

Tedy: Klesající funkce je funkce, pro kterou platí: Zvětšují-li se hodnoty proměnné x, zmenšují se hodnoty funkce y.

Např. y = – 3x – 2

x	**– 1**	**– 2**
y = – 3x – 2	**1**	**4**



Lineární funkce *y = kx + q* je rostoucí, jestliže k *<0*.

Př.: Rozhodni, zda je daná funkce rostoucí nebo klesající:

a) y = – 5x b) y = 2x – 4 c) y = – 0,3x + 0,5

d) y = – 8 e) y = 1 – x

Řešení: a) klesající b) rostoucí c) klesající d) konstantní e) klesající

♣♣♣ PS A 25/3

<u>C)KONSTANTNÍ FUNKCE</u>

Lineární funkci y = kx + q, kde k = 0, nazýváme **konstantní funkce**. Jejím grafem je vždy přímka rovnoběžná s osou *x*, která prochází bodem *[0, q]*.

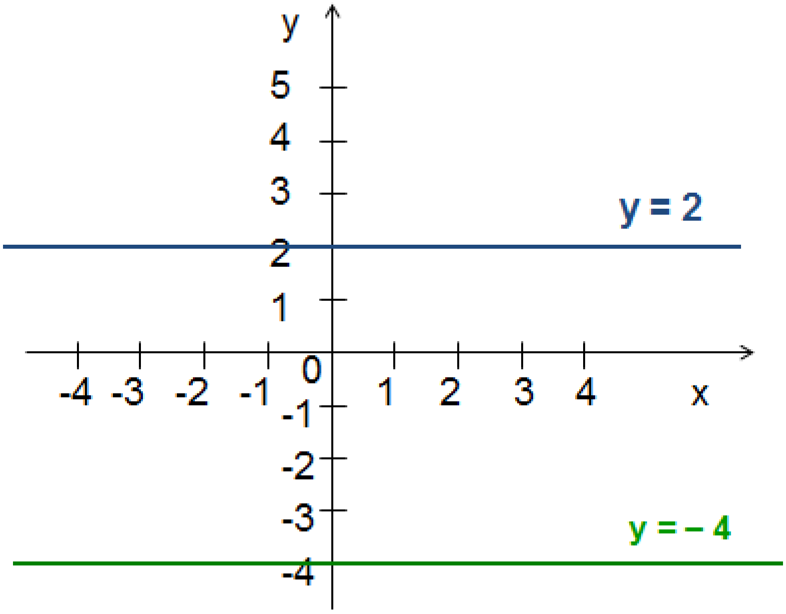
Např.:

y = – 4

x	-1	2
y = – 4	4	4

y = 2

x	-3	4
y = 2	2	2



Př.: Zapiš rovnici konstantní funkce, která prochází bodem [-7; 6].

Řešení: y = 6

♣♣♣ PS A 26/4

PRŮSEČÍKY S OSAMI

Průsečíky s osou y mají x-ovou souřadnici rovnu nule, proto do rovnice fce dosadíme x = 0 a vypočítáme hodnotu y.

Př.: Určete průsečíky grafů daných funkcí s osou *y*:

a) y = – x + 3 b) y = 7x + 15 c) y = 0,5x - 0,6

Řešení: a) [0; 3]; b) [0; 15]; c) [0; - 0,6]

Průsečíky s osou x mají y-ovou souřadnici rovnu nule, proto do rovnice fce dosadíme y = 0 a vypočítáme hodnotu x.

Př. Urči (bez rýsování), ve kterých bodech protíná graf lineární funkce osy souřadnic:

a) $y = 2x - 3$

osa y

$x = 0$

$y = -3$

osa x

$y = 0$

$x = \frac{3}{2}$

$A[0;-3]$ $B\left[\frac{3}{2};0\right]$

b) $y = -3x$

$C[0;0]$

c) $y = 0,5x + 3$

osa y *osa x*

$D[0;3]$ $E[-6;0]$

♣♣♣ PS A 26/5 - 7

GRAF PROCHÁZEJÍCÍ DANÝM BODEM

Př.:

Napiš rce aspoň dvou LF, které procházejí daným bodem A[0; 3].

f: $y = kx + q$

$A \in f$: $3 = k.0 + q$

$q = 3;\ k \in R$ **y = 2x + 3** **y = 4x + 3** **y = -3x + 3**

Př.:

Urči rovnici lineární fce, která prochází body A[-2;2], B[2;4].

$$y = kx + q$$

1) dosadíme souřadnice bodu A

2) dosadíme souřadnice bodu B

3) řešíme soustavu rovnic

$$2 = -2k + q$$

$$4 = 2k + q$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Př.:

Urči rovnici lineární fce, která prochází body A[6;-3], B[2;1]

$$y = kx + q$$

$$-3 = 6k + q$$

$$1 = 2k + q$$

Řeš soustavu rovnic vhodnou metodou.

$$y = -x + 3$$

Př.:

Urči hodnotu ***q*** v rovnici ***y = 0,25x + q***, jestliže graf této lineární funkce protíná osu y v bodě o souřadnicích:

$a)\quad [0;0]$

$0 = 0{,}25.0 + q$

$q = 0$

$b)\quad [0;-3]$

$q = -3$

Př.:

Urči lineární funkci, jejíž graf je ***rovnoběžný*** s grafem funkce ***y = -2x*** a prochází bodem o souřadnicích ***[0;4]***.

$$y = -2x + 4$$

Urči lineární funkci, jejíž graf je ***rovnoběžný*** s grafem funkce ***y = 2x – 3*** a prochází bodem o souřadnicích ***[0;0]***.

$$y = 2x$$

♣♣♣ PS A 26/8 – 20

GRAFICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC

Př.: Najdi řešení soustavy lineárních rovnic: 2x - y = 3

3x + y = 7

2.) Sestrojíme grafy lineárních závislostí.

Určíme souřadnice dvou různých bodů, kterými prochází graf lineární závislosti dané rovnicí:

$$y = 2x - 3$$

Např. pro x=1: y=2.1-3=2-3=-1

y=-1

Souřadnice prvního bodu jsou:

A [1;-1]

Např. pro x=0: y=2.0-3=0-3=-3

y=-3

Souřadnice druhého bodu jsou:

B [0;-3]

Přímka, jež je grafem lineární závislosti dané rovnicí y=2x-3, prochází body o souřadnicích A [1;-1] a B [0;-3].

2.) Sestrojíme grafy lineárních závislostí.

Určíme souřadnice dvou různých bodů, kterými prochází graf lineární závislosti dané rovnicí:

$$y = -3x + 7$$

Např. pro x=1: y=-3.1+7=-3+7=4

y=4

Souřadnice prvního bodu jsou:

C [1;4]

Např. pro x=3: y=-3.3+7=-9+7=-2

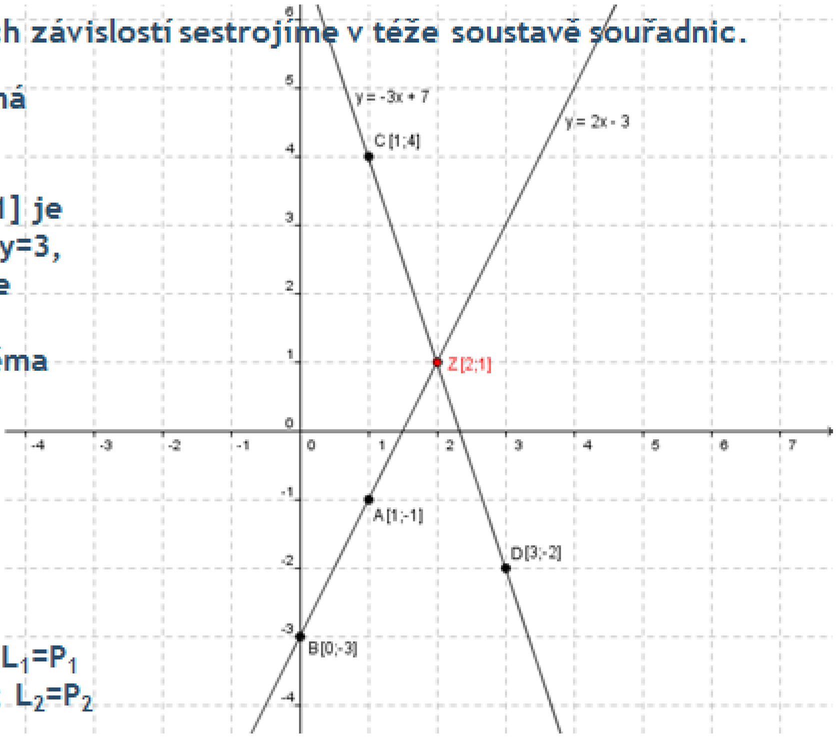
y=-2

Souřadnice druhého bodu jsou:

D [3;-2]

Přímka, jež je grafem lineární závislosti dané rovnicí y=-3x+7, prochází body o souřadnicích C [1;4] a D [3;-2].

3.) Grafy obou lineárních závislostí sestrojíme v téže soustavě souřadnic.



Průsečík obou přímek má souřadnice [2;1].

Uspořádaná dvojice [2;1] je řešením jak rovnice 2x-y=3, tak i rovnice 3x+y=7. Je tedy řešením soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými.

Z [2;1]

Zkouška:
L_1=2.2-1=4-1=3; P_1=3; L_1=P_1
L_2=3.2+1=6+1=7; P_2=7; L_2=P_2

Ověříme, že uspořádaná dvojice [2;1] je řešením dané soustavy ještě i početně.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 3x + y &= 7 \\ \hline 5x &= 10 \quad /:5 \\ x &= 10:5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 2 \cdot 2 - y &= 3 \\ 4 - y &= 3 \quad / - 4 \\ -y &= 3 - 4 \\ -y &= -1 \quad /.(-1) \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Zkouška}: \quad L_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \qquad L_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$
$$P_1 = 3 \qquad L_1 = P_1 \qquad P_2 = 7 \qquad L_2 = P_2$$

Řešením dané soustavy je tedy skutečně uspořádaná dvojice [2;1].

♣♣♣ PS A 33/21

Příklady z praxe

1. V balonu je 1,8 kg tekutého propanu. Plynovým hořákem se spotřebuje každou hodinu 0,2 kg propanu. Jaké množství ***m*** propanu bude v balonu za ***t*** hodin letu? Sestrojte graf a určete z něho:

a) Kolik kg propanu bude v balonu za 3 h; 5 h; 6,5 h?

b) Za jakou dobu se zmenší zásoba propanu o 0,6 kg; 1 kg; 1,5 kg?

2. Sestrojte grafy funkcí vyjadřujících závislost velikosti proudu ***I*** na napětí ***U*** podle Ohmova zákona pro odpory: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$.

3. Na natření 10 metrů plotu se spotřebuje 4,5 kg barvy. Natěrač má zásobu 20 kg barvy. Napište rovnici popisující závislost množství zásoby barvy (***y*** kg) na délce natřeného plotu (***x*** m). Určete podmínku pro *x*.

4. Napište rovnici funkce vyjadřující závislost počtu vyrobených součástek ***n*** na čase ***t*** (v hodinách) na pravidelně pracujícím automatu, který vyrobí za 8 hodin vždy 120 součástek.

5. Silnice stejnoměrně klesá. Určete graficky výšku bodu, který je vzdálen od místa *A* 15 km, má-li bod vzdálený od místa *A* 5 km výšku 150 m a bod vzdálený od místa *A* 9 km výšku 120 metrů.

6. Cisterna na naftu se má naplnit na 55 m^3. Čerpadlo dodá do cisterny 3,5 m^3 nafty za minutu. Před začátkem činnosti čerpadla bylo již 6 m^3 nafty. Určete graficky, za jak dlouho se cisterna naplní.

7. Auto a motorka vyjíždějí z místa *B* po stejné trase tak, že nejprve vyjede auto průměrnou rychlostí 50 km/h a za dvě hodiny za ním motorka průměrnou rychlostí 70 km/h. Určete graficky, kdy a v jaké vzdálenosti od výchozího místa motorka auto dohoní.

Řešení:

1) $m = -0{,}2t + 1{,}8$; $m_3 = 1{,}2$ kg; $m_5 = 0{,}8$ kg; $m_{6,5} = 0{,}5$ kg; 3 h, 5 h, 7,5 h

2) $I = 0{,}1U$; $I = 0{,}04U$; $I = 0{,}02U$

3) $y = -0{,}45x + 20$; $0\text{ m} \leq x \leq 400/9\text{ m}$

4) $n = 15t$

5) 75 m

6) $y = 3{,}5x + 6$

7) $y_1 = 50x + 100$; $y_2 = 70x$; 5 h; 350 km

http://dum.rvp.cz/materialy/soustava-souradnic.html